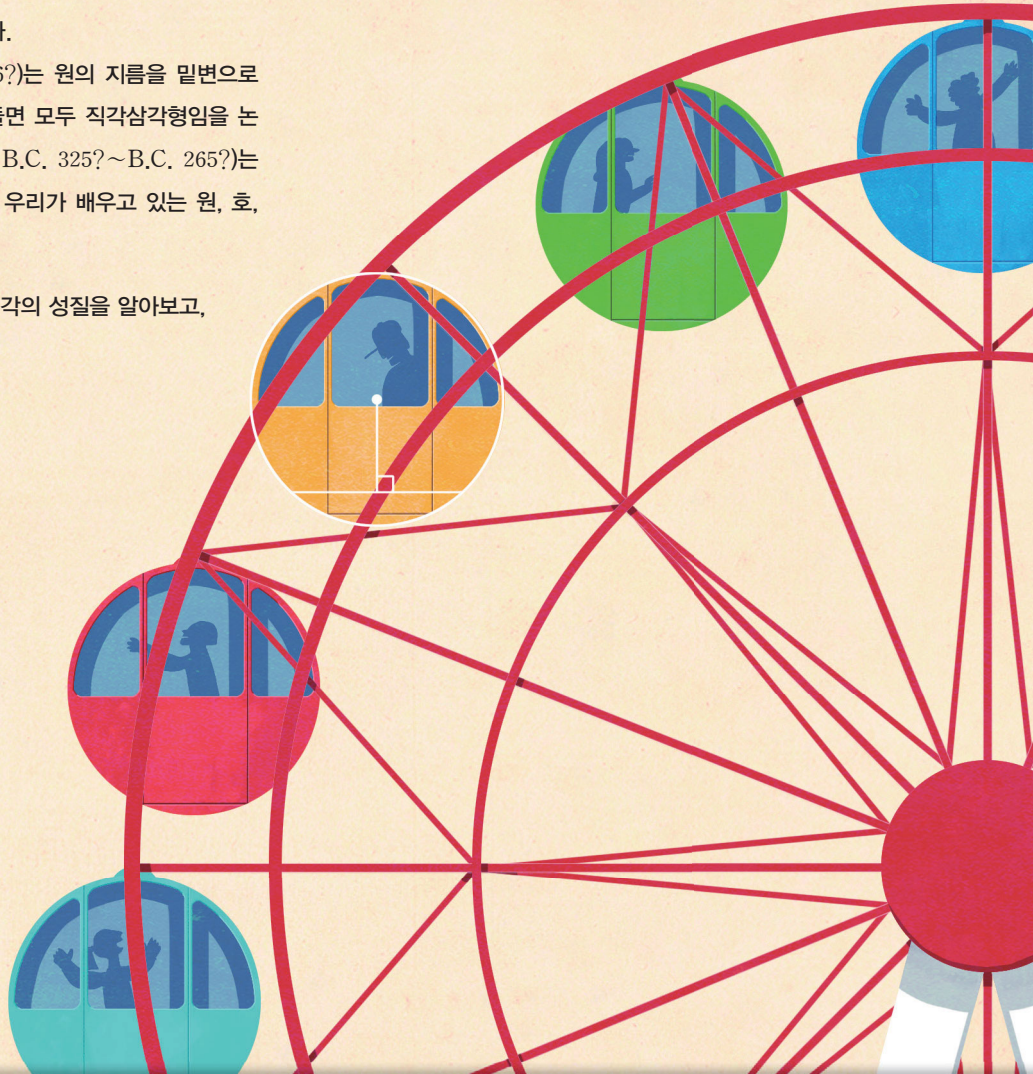
6

원의 성질

우리는 생활 주변에서 동전, 자동차의 바퀴, 맨홀 뚜껑, 놀이공원의 대관람차 등 원 모양으로 된 사물을 쉽게 찾아볼 수 있는데 이들은 모두 원의 여러 가지 성질을 활용한 사례이다.

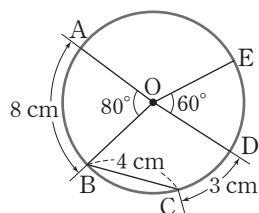
탈레스(Thales, B.C. 624?~B.C. 546?)는 원의 지름을 밑변으로 하고 원 위의 한 점을 잡아 삼각형을 만들면 모두 직각삼각형임을 논리적으로 설명하였고, 유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)는 그의 저서 『원론(Elements)』에서 오늘날 우리가 배우고 있는 원, 호, 원주각에 대한 기초적 이론들을 다루었다.

이 단원에서는 원과 현, 원과 접선, 원주각의 성질을 알아보고, 이를 활용하는 방법을 배운다.

준비해 볼까?

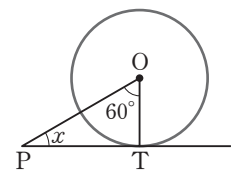
1 오른쪽 그림의 원 O에서 다음을 각각 구하시오.

(1) 호 AB에 대한 중심각의 크기

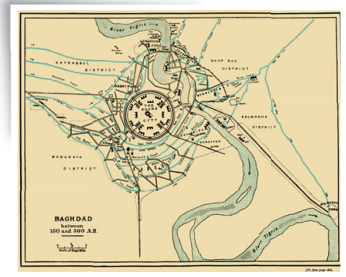
(2) 부채꼴 DOE의 중심각의 크기

(3) 현 BC의 길이

(4) 호 DE의 길이

2 오른쪽 그림에서 반직선 PT는 원 O의 접선이고, 점 T는 원 O의 접점이다. $\angle POT=60^\circ$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

이야기로 여는 수학

둥글게 지키기

사향소들은 늑대나 곰이 공격하면 새끼를 등지고 원을 만들어 방어합니다. 둥글게 둘러서면 삼각형이나 사각형으로 둘러서는 것보다 안쪽의 넓이가 더 넓어져서 같은 마릿수로 방어하는 넓이를 최대한 크게 할 수 있습니다.

사람들도 아주 오래전부터 원을 이용하여 안전한 공간을 만들었습니다. 도시를 나타내는 고대 이집트의 그림 문자는 가운데에 네거리가 그려진 원이고, 766년에 만들어진 바그다드의 원형 도시는 내부의 원 모양을 중심으로 둥글게 설계되었습니다. 이는 원 모양의 도시가 그 원과 둘레의 길이가 같은 삼각형이나 사각형 모양의 도시보다 도시 안의 넓이를 더 넓게 만들 수 있기 때문입니다.

이와 같이 원은 그것이 가지고 있는 유용한 성질로 인해 자연에서뿐만 아니라 인류 문명에서도 중요한 요소로 사용되고 있습니다.

바그다드의 원형 도시 지도

[출처] • 미야자키 마사카츠(김진연 역), 『처음부터 다시 읽는 친절한 세계사』
• 캐서린 셀드릭 로스(이범규 역), 『원 – 수학, 과학, 자연에서 찾는 도형』

- 길이가 36 cm인 얇은 실로 둘러싸인 다음 도형을 만들었을 때, 만들어진 도형의 넓이를 각각 구하여 비교해 보자. (단, π는 3으로, $\sqrt{3}$은 1.7로 계산한다.)

원, 정삼각형, 정사각형

태도 및 실천

- 우리 주변에서 원 모양으로 만들어진 것을 찾아보고, 그렇게 만든 이유를 말해 보자.

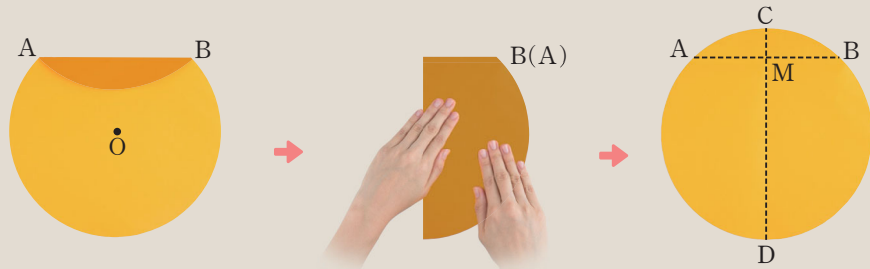
6.1 원과 현

학|습|목|표

• 원의 현에 관한 성질을 이해한다.

원 모양의 종이접기

준비물: 종이, 컴퍼스, 가위

종이에 컴퍼스로 원 O를 그려 오려 낸 후 다음 활동을 통해 원의 중심과 현 사이의 관계를 생각해 봅시다.

❶ 종이를 접어 현 AB를 만든다.

❷ 두 점 A와 B가 겹치도록 종이를 접었다가 펼친다.

❸ ❷에서 접은 선을 현 CD라 하고, 현 CD와 현 AB의 교점을 M이라고 한다.

활동 1 현 CD가 원의 중심 O를 지나는지 확인해 보자.

활동 2 두 현 AB와 CD가 서로 수직인지 말해 보자.

활동 3 두 선분 AM과 BM의 길이를 비교해 보자.

생각 1 **원의 중심과 현의 수직이등분선 사이에는 어떤 관계가 있나요?**

생각 열기에서 원은 현 CD를 기준으로 합동인 두 반원으로 나누어지게 되므로 현 CD는 원의 중심을 지난다. 또한, 두 점 A와 B가 겹치도록 종이를 접었다가 펼치면 현 CD는 현 AB의 수직이등분선이 되므로 두 선분 AM과 BM의 길이는 서로 같다.

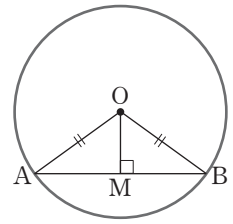
이와 같은 성질이 항상 성립하는지 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 △OAM과 △OBM에서

$\overline{OA}=\overline{OB}$ (반지름)

$\overline{OM}$은 공통인 변

$\angle OMA=\angle OMB=90°$

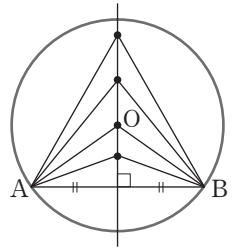
이므로 직각삼각형의 합동 조건에 따라 △OAM≡△OBM이다.

중2 배웠어요!

두 직각삼각형에서 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으면 서로 합동이다.

따라서 $\overline{AM}=\overline{BM}$이다.

즉, 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

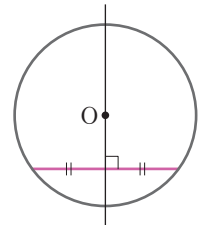
한편, 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지남을 알아보자.

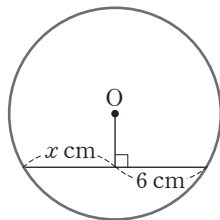
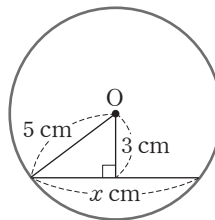
오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 양 끝 점으로부터 같은 거리에 있는 점은 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위에 있다. 그런데 원의 중심 O는 현 AB의 양 끝 점으로부터 같은 거리에 있으므로 현 AB의 수직이등분선 위에 있다.

따라서 현 AB의 수직이등분선은 원의 중심 O를 지난다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

원의 중심과 현의 수직이등분선

1. 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

2. 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

문제 1 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

생각 2 **원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이 사이에는 어떤 관계가 있나요?**

오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하고 $\overline{OM}=\overline{ON}$이라고 하면 $\triangle$OAM과 $\triangle$OCN에서

$$\overline{OM}=\overline{ON},\ \overline{OA}=\overline{OC}\ (\text{반지름})$$

$$\angle OMA=\angle ONC=90^\circ$$

이므로 직각삼각형의 합동 조건에 따라 $\triangle OAM\equiv\triangle OCN$이다.

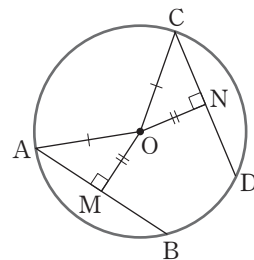
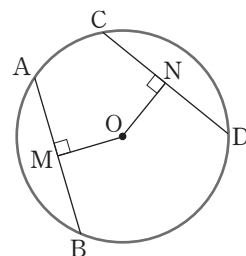
따라서 $\overline{AM}=\overline{CN}$이다.

그런데 $2\overline{AM}=\overline{AB}$, $2\overline{CN}=\overline{CD}$이므로

$$\overline{AB}=\overline{CD}$$

임을 알 수 있다.

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

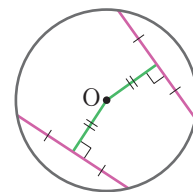
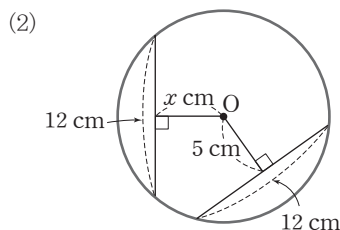
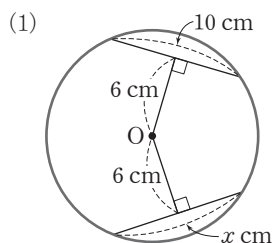
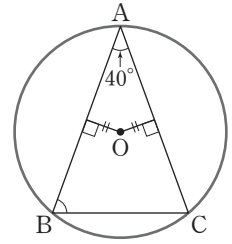
즉, 한 원에서 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 서로 같다.

문제 2 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 할 때, $\overline{AB}=\overline{CD}$이면 $\overline{OM}=\overline{ON}$임을 설명하시오.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

원의 중심과 현의 길이

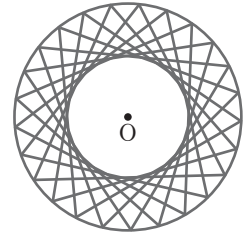
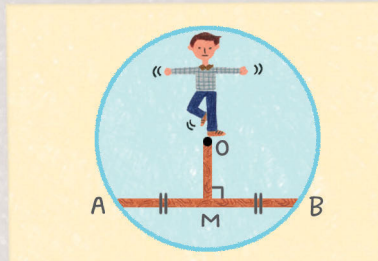
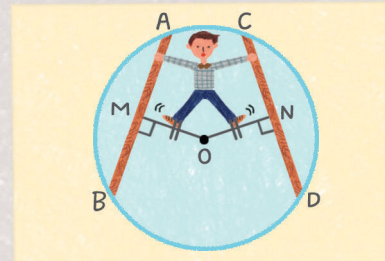
1. 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.
2. 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

문제 3 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

문제 4 오른쪽 그림과 같이 두 현 AB, AC가 원 O의 중심으로부터 같은 거리에 있다. $\angle BAC = 40°$일 때, $\angle ABC$의 크기를 구하시오.

동료 평가

- 친구가 말한 이유가 적절한가?
- 친구는 나의 설명을 잘 경청하였는가?

오른쪽 그림과 같이 원 O에 길이가 2.5 cm인 현을 여러 개 그리면 원 O의 내부에 원에 가까운 모양이 그려지는 것을 알 수 있다. 원 O의 내부에 원에 가까운 모양이 그려지는 이유를 친구와 이야기해 보자.

스스로 해결하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

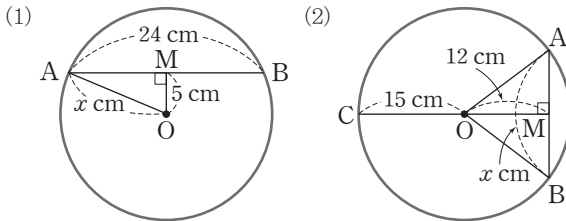
(1) 원의 중심에서 현에 내린 ☐은 그 현을 이등분한다.

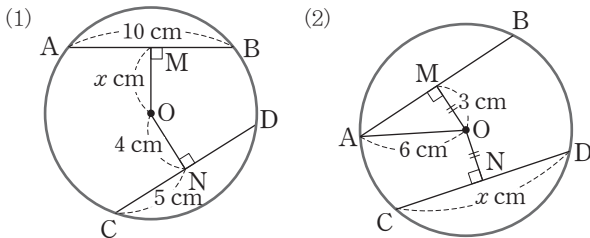
(2) 현의 수직이등분선은 그 원의 ☐을 지난다.

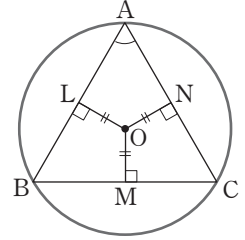
(3) 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 ☐.

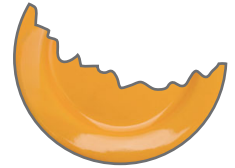
(4) 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 ☐으로부터 같은 거리에 있다.

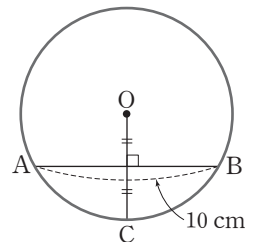
2

다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

3

다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

4

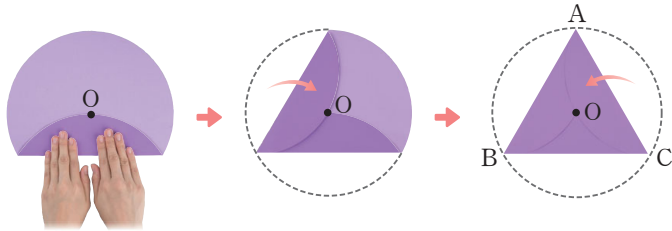
오른쪽 그림에서 원 O가 △ABC의 외접원이고 $\overline{OL}=\overline{OM}=\overline{ON}$일 때, ∠BAC의 크기를 구하시오.

5 추론

오른쪽 그림은 원 모양의 접시의 일부가 깨진 것이다. 이를 복원하기 위해 원의 중심을 찾고자 할 때, 어떻게 해야 할지 그 방법을 설명하시오.

6 과정을 다지는 문제

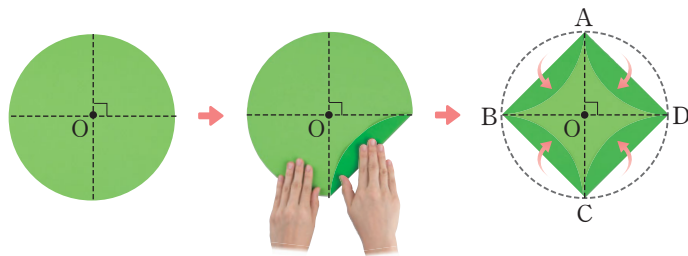
오른쪽 그림의 원 O에서 현 AB는 반지름 OC의 수직이등분선이다. $\overline{AB}=10$ cm일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

원 모양의 종이접기

원 모양의 종이를 접어서 여러 가지 정다각형을 만들어 보고, 종이접기에서 이용된 원의 성질에 대하여 친구와 이야기해 보자.

정삼각형 만들기

아래 그림과 같이 호가 원의 중심 O와 만나도록 차례로 접는다.

이와 같은 방법으로 만든 △ABC는 한 원에서 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 세 현의 길이가 모두 같으므로 정삼각형이다.

정사각형 만들기

❶ 아래 그림과 같이 반으로 두 번 접고 펼치면 서로 수직인 2개의 접힌 선이 보인다.
❷ 원과 접힌 선이 만나는 점들을 이용하여 접는다.

이와 같은 방법으로 만든 □ABCD는 두 대각선의 길이가 서로 같고, 한 원에서 크기가 같은 중심각에 대한 네 현의 길이가 모두 같으므로 정사각형이다.

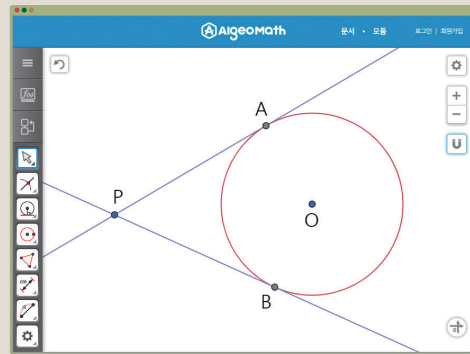
위와 같이 원 모양의 종이를 접어 정육각형을 만들어 보고, 접은 도형이 정육각형임을 설명해 보자.

6.2 원과 접선

학 | 습 | 목 | 표

• 원의 접선에 관한 성질을 이해한다.

두 선분의 길이 비교하기

은비는 다음 그림과 같이 컴퓨터 프로그램을 이용하여 원 O를 그린 후, 원 O 밖의 한 점 P를 잡아 그 원에 2개의 접선을 그었습니다. 이때 두 선분 PA와 PB의 길이를 생각해 봅시다.

활동 1 두 선분 PA와 PB의 길이를 비교해 보자.

활동 2 점 P의 위치를 바꾸어 가면서 두 선분 PA와 PB의 길이를 관찰해 보자.

생각 1

선분 PA와 선분 PB의 길이 사이에는 어떤 관계가 있나요?

생각 열기에서 원 O 밖의 한 점 P의 위치와 관계없이 두 선분 PA와 PB의 길이가 서로 같음을 알 수 있다. 이와 같은 성질이 항상 성립하는지 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 P에서 원 O에 그을 수 있는 접선은 2개이다. 이때 두 접선의 접점을 각각 A, B라고 하면 $\triangle$POA와 $\triangle$POB에서

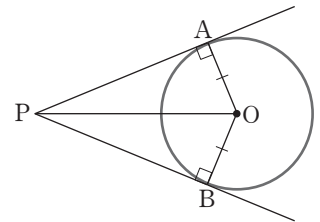
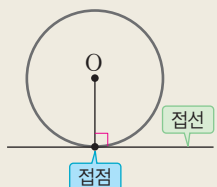
$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$, $\overline{OA} = \overline{OB}$ (반지름),

$\overline{OP}$는 공통인 변이므로 $\triangle POA \equiv \triangle POB$이다.

따라서 $\overline{PA} = \overline{PB}$임을 알 수 있다.

| 참고 | 위 그림에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 길이를 점 P에서 원 O에 그은 접선의 길이라고 한다.

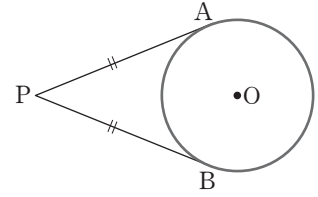
중2 배웠어요!

O
접선
접점

원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직이다.

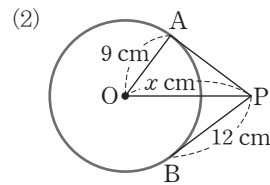
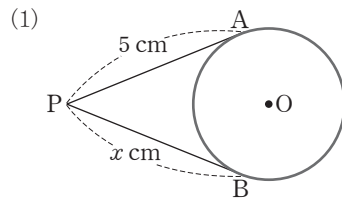
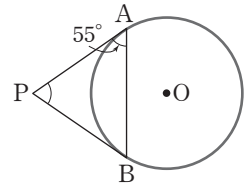
앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.

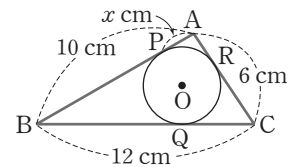
접선의 길이

원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같다. 즉,

$\overline{PA}=\overline{PB}$

문제 1 다음 그림에서 두 점 A, B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다. 이때 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

문제 2 오른쪽 그림에서 두 점 A, B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다. $\angle PAB=55°$일 때, $\angle APB$의 크기를 구하시오.

예제 1

오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$는 원 O에 외접하고, 세 점 P, Q, R는 각각 원 O의 접점이다. $\overline{AB}=10$ cm, $\overline{BC}=12$ cm, $\overline{AC}=6$ cm일 때, x의 값을 구하시오.

원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같다.

풀이 | $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$는 각각 원 O의 접선이므로

$\overline{AR}=\overline{AP}=x$ cm, $\overline{BQ}=\overline{BP}=10-x$ (cm), $\overline{CQ}=\overline{CR}=6-x$ (cm)

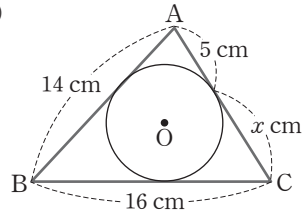
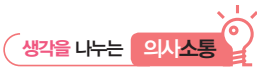
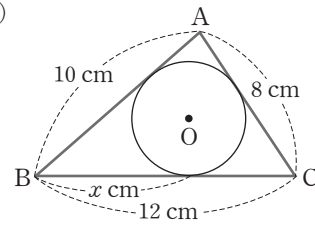
그런데 $\overline{BC}=\overline{BQ}+\overline{CQ}$이고, $\overline{BC}=12$ cm이므로

$12=(10-x)+(6-x)$, $12=16-2x$, $2x=4$

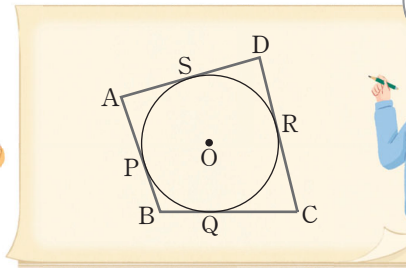
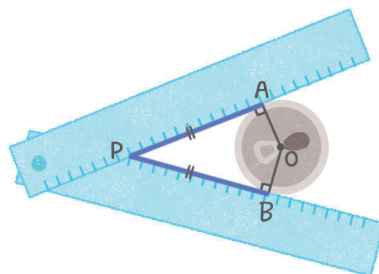
따라서 $x=2$이다.

답 2

문제 3 다음 그림에서 △ABC가 원 O에 외접할 때, x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

다음 그림에서 □ABCD는 원 O에 외접하고 네 점 P, Q, R, S는 각각 원 O의 접점이다. 대화를 읽고, $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$가 성립하는지 이야기해 보자.

스스로 해결하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

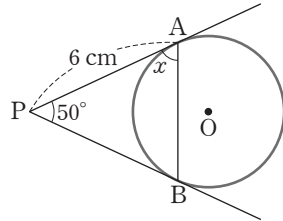
(1) 원 밖의 한 점에서 그 원에 그을 수 있는 접선은 ☐개이다.

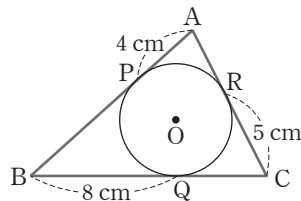
(2) 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 ☐.

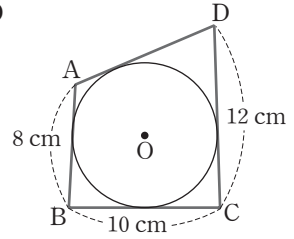
2

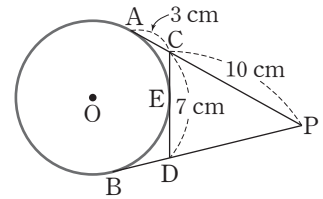
오른쪽 그림에서 두 점 A, B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다. $\overline{PA}=6$ cm, $\angle APB=50^\circ$일 때, 다음을 구하시오.

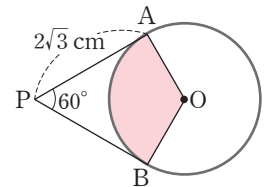
(1) $\overline{PB}$의 길이

(2) $\angle x$의 크기

3

오른쪽 그림에서 △ABC가 원 O에 외접하고 세 점 P, Q, R는 각각 원 O의 접점이다. $\overline{AP}=4$ cm, $\overline{BQ}=8$ cm, $\overline{CR}=5$ cm일 때, △ABC의 둘레의 길이를 구하시오.

4

오른쪽 그림과 같이 □ABCD가 원 O에 외접하고, $\overline{AB}=8$ cm, $\overline{BC}=10$ cm, $\overline{CD}=12$ cm이다. 이때 $\overline{AD}$의 길이를 구하시오.

5 추론

오른쪽 그림에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{CD}$는 원 O의 접선이고, 점 A, B, E는 접점이다. $\overline{AC}=3$ cm, $\overline{CD}=7$ cm, $\overline{PC}=10$ cm일 때, $\overline{PD}$의 길이를 구하시오.

6 과정을 다지는 문제

오른쪽 그림에서 두 점 A, B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다. $\angle APB=60^\circ$이고 $\overline{AP}=2\sqrt{3}$ cm일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

원주각

학|습|목|표

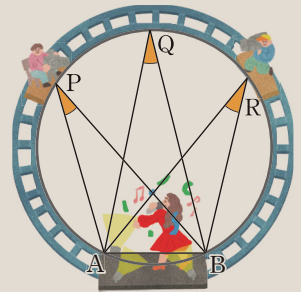
• 원주각의 성질을 이해한다.

학|습|요|소

• 원주각

음악 방송에서 카메라의 위치

준비물: 각도기

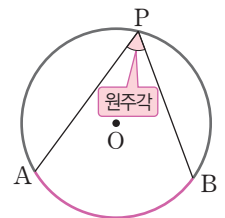
어느 음악 방송에서 오른쪽 그림과 같이 원 모양으로 깔린 레일 위에서 카메라를 움직이며 촬영을 하려고 합니다. 무대의 양 끝 점을 각각 A, B라 하고, 카메라가 세 점 P, Q, R를 지날 때, 카메라의 위치와 카메라가 무대 전체를 촬영하는 각의 크기를 생각해 봅시다.

활동 1 각도기를 이용하여 세 각 ∠APB, ∠AQB, ∠ARB의 크기를 각각 측정해 보자.

활동 2 **활동 1**에서 측정한 세 각의 크기를 비교해 보자.

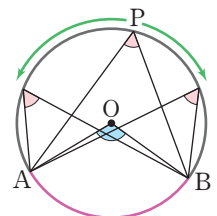
생각 1

카메라의 위치와 카메라가 무대 전체를 촬영하는 각의 크기는 어떤 관계가 있나요?

생각 열기에서 카메라의 위치와는 관계없이 무대 전체를 촬영하는 각의 크기인 ∠APB, ∠AQB, ∠ARB의 크기는 모두 같음을 알 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 원 O에서 호 AB 위에 있지 않은 원 위의 한 점을 P라고 할 때, ∠APB를 호 AB에 대한 **원주각**이라고 한다. 이때 호 AB를 원주각 ∠APB에 대한 호라고 한다.

중1 배웠어요!

한 원에서 원 위의 두 점 A, B와 원의 중심 O로 이루어진 각인 ∠AOB를 호 AB에 대한 중심각이라고 한다.

원 O에서 호 AB가 정해지면 호 AB에 대한 중심각 ∠AOB는 하나로 정해지지만, 호 AB에 대한 원주각 ∠APB는 점 P의 위치에 따라 무수히 많다.

생각 열기에서 한 호에 대한 세 원주각의 크기는 서로 같음을 알 수 있다. 이제 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기가 항상 같은지 알아보기 위하여 원주각과 중심각의 크기 사이의 관계를 알아보자.

원 O에서 호 AB에 대한 원주각 $\angle APB$와 원의 중심 O의 위치 관계는 점 P의 위치에 따라 다음과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

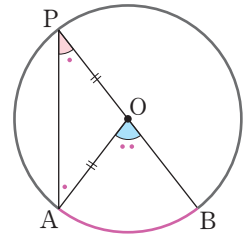
❶ 중심 O가 $\angle APB$의 한 변 위에 있는 경우

오른쪽 그림에서 $\triangle OPA$는 $\overline{OP}=\overline{OA}$인 이등변삼각형이므로 $\angle APO=\angle PAO$이다.

그런데 $\angle AOB$는 $\triangle OPA$의 한 외각이므로

$$\angle AOB=\angle APO+\angle PAO=2\angle APB$$

즉, $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$이다.

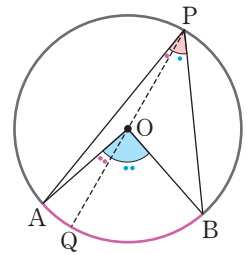
> **중1 배웠어요!**
> 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.
> $\angle z=\angle x+\angle y$

❷ 중심 O가 $\angle APB$의 내부에 있는 경우

오른쪽 그림과 같이 지름 PQ를 그으면 ❶에 의하여

$$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ,\ \angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ$$

이므로

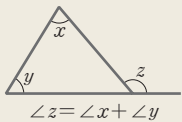
$$\begin{aligned}\angle APB&=\angle APQ+\angle BPQ\\&=\frac{1}{2}(\angle AOQ+\angle BOQ)\\&=\frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

즉, $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$이다.

❸ 중심 O가 $\angle APB$의 외부에 있는 경우

오른쪽 그림과 같이 지름 PR를 그으면 ❶에 의하여

$$\angle RPB=\frac{1}{2}\angle ROB,\ \angle RPA=\frac{1}{2}\angle ROA$$

이므로

$$\begin{aligned}\angle APB&=\angle RPB-\angle RPA\\&=\frac{1}{2}(\angle ROB-\angle ROA)\\&=\frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

즉, $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$이다.

앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.

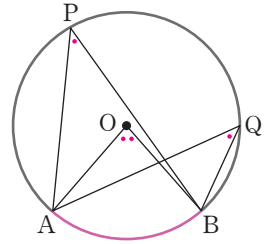
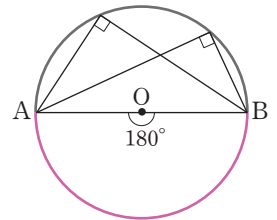
원주각과 중심각의 크기

1. 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$과 같다. 즉,

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

2. 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다. 즉,

$$\angle APB = \angle AQB$$

다음 그림과 같이 호 AB의 중심각의 크기가 180°보다 클 때에도 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$임을 알 수 있다.

특히, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$가 원 O의 지름일 때, 호 AB에 대한 중심각의 크기는 180°이므로 반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 알 수 있다.

문제 1 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)

(2)

(3)

생각 2 **한 원에서 원주각의 크기와 호의 길이 사이에는 어떤 관계가 있나요?**

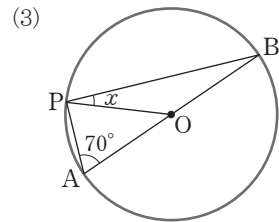
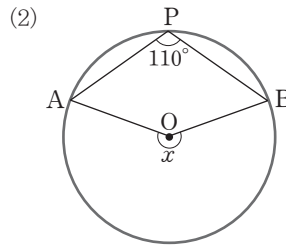
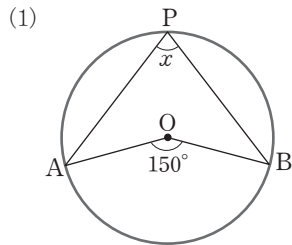
오른쪽 그림과 같이 원 O에서 호 AB와 호 CD의 길이가 같으면 길이가 같은 두 호에 대한 중심각의 크기가 같으므로

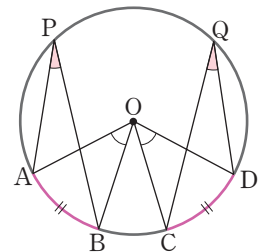
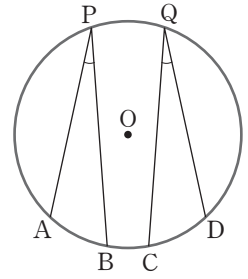
$$\angle AOB = \angle COD$$

이다. 또, 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB, \ \angle CQD = \frac{1}{2}\angle COD$$

이다. 따라서 $\angle APB = \angle CQD$이다.

즉, 한 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 서로 같다.

중1 배웠어요!

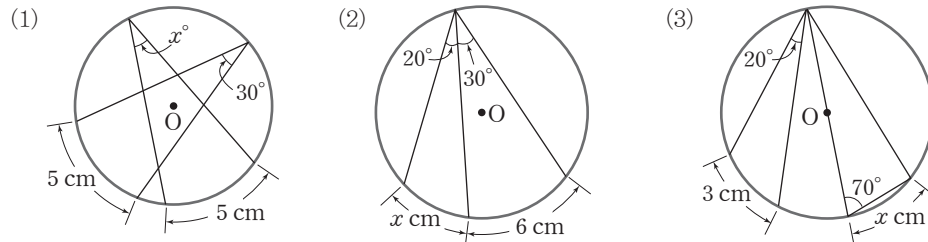
한 원에서 중심각의 크기가 같은 두 부채꼴의 호의 길이는 같다.

문제 2 오른쪽 그림의 원 O에서 $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{CQD}$일 때, $\widehat{\mathrm{AB}} = \widehat{\mathrm{CD}}$임을 설명하시오.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

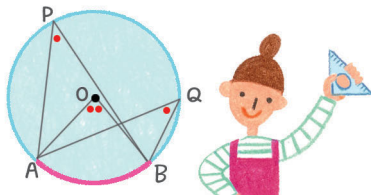
원주각의 크기와 호의 길이에 대한 성질은 합동인 두 원에서도 성립한다.

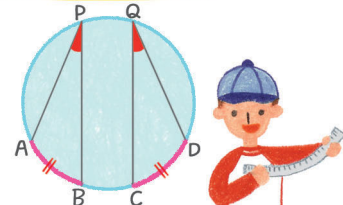
원주각의 크기와 호의 길이

1. 한 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 서로 같다.
2. 한 원에서 같은 크기의 원주각에 대한 호의 길이는 서로 같다.

| **참고** | 한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 중심각의 크기에 정비례하므로 호의 길이는 그 호에 대한 원주각의 크기에 정비례한다.

문제 3 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)
(2)
(3)
수학 집 짓기

원주각과 중심각의 크기

(1) $\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$
(2) $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$

원주각의 크기와 호의 길이

(1) $\widehat{\mathrm{AB}} = \widehat{\mathrm{CD}}$ 이면 $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{CQD}$
(2) $\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{CQD}$ 이면 $\widehat{\mathrm{AB}} = \widehat{\mathrm{CD}}$

스스로 해결하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 ☐과 같다.

(2) 한 ☐에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

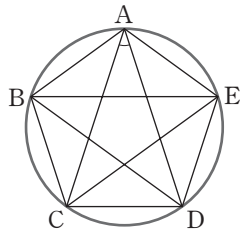
(3) 한 원에서 같은 길이의 ☐에 대한 원주각의 크기는 서로 같다.

(4) 한 원에서 같은 크기의 원주각에 대한 ☐의 길이는 서로 같다.

2

오른쪽 그림을 보고, 다음을 기호로 나타내시오.

(1) 호 AB에 대한 원주각

(2) 원주각 $\angle$CAD에 대한 호

3

다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)

(2)

4

다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

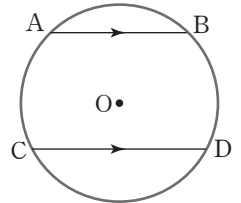
12 cm

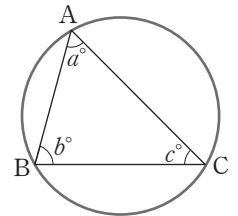
x cm

60°

O

5 추론

오른쪽 그림의 원 O에서 두 현 AB, CD가 평행할 때, $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$임을 설명하시오.

6 과정을 다지는 문제

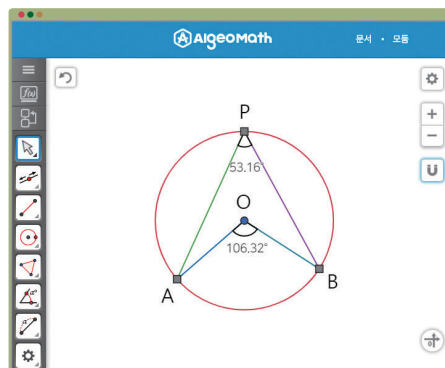
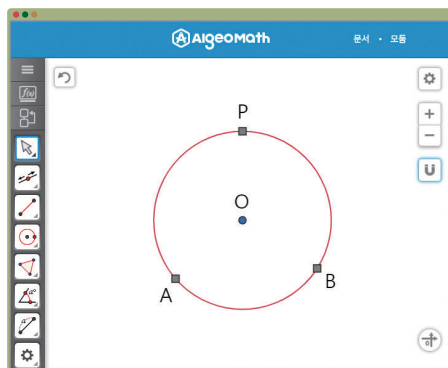
오른쪽 그림의 원에서 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=3:4:5$이다. $\angle BAC=a°$, $\angle ABC=b°$, $\angle BCA=c°$라고 할 때, $a+b-c$의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

원주각과 중심각의 크기 사이의 관계 확인하기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$과 같다는 것을 확인해 보자.

점 P가 원 O 위의 점일 때, 원주각과 중심각의 크기 사이의 관계 알아보기

❶ '원: 중심과 한 점' 을 사용하여 원 O를 그리고, '점' 을 사용하여 원 O 위에 세 점 A, B, P를 잡는다.

❷ '선분' 을 사용하여 $\angle$AOB와 $\angle$APB를 그리고, '각도' 을 사용하여 $\angle$AOB, $\angle$APB의 크기를 측정한다.

❸ 점 P를 원 O 위의 호 AB를 제외한 부분에서 움직이면서 $\angle$APB의 크기를 측정해 보고, $\angle$AOB와 $\angle$APB의 크기 사이의 관계를 관찰해 보자.

이 과정에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$임을 확인할 수 있다.

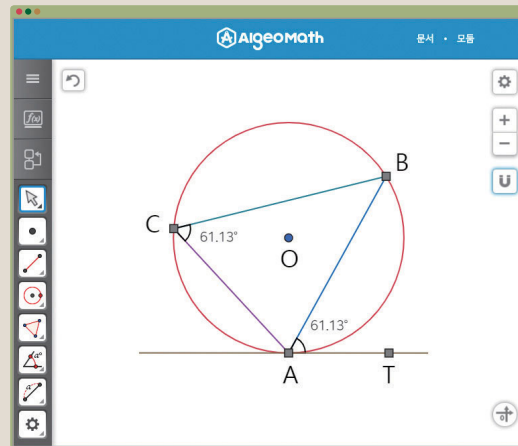
점 P가 원 O의 내부 또는 외부의 점일 때, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 $\angle$APB와 $\frac{1}{2}\angle$AOB의 크기를 각각 구하여 비교해 보자.

6.4 원주각의 활용

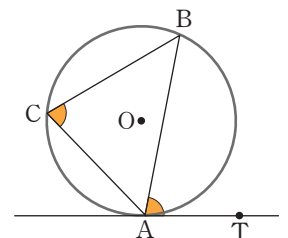
학|습|목|표

- 원주각의 성질을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

원의 접선과 현이 이루는 각의 크기

준영이는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 원 O 위에 서로 다른 세 점 A, B, C와 점 A에서 원 O에 접하는 직선 AT를 그렸습니다. 이때 원의 접선과 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 어떤 관계가 있는지 생각해 봅시다.

활동 1 점 B를 원 O 위에서 움직이면서 $\angle BAT$와 $\angle BCA$의 크기를 비교해 보자.

생각 1 **점 B가 원 O 위를 움직일 때, $\angle BAT$의 크기와 $\angle BCA$의 크기 사이에는 어떤 관계가 있나요?**

생각 열기에서 점 B를 원 O 위에서 어떻게 이동하여도 $\angle BAT$와 $\angle BCA$의 크기는 항상 같음을 알 수 있다. 즉, 원 위의 한 점에서의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같음을 알 수 있다.

이와 같은 성질이 항상 성립하는지 알아보기 위하여 원 O 위의 세 점 A, B, C에 대하여 점 A에서 원 O에 접하는 직선 AT와 현 AB가 이루는 $\angle$BAT의 크기가 직각, 예각, 둔각인 세 가지 경우로 나누어 생각해 보자.

❶ $\angle$BAT가 직각인 경우

오른쪽 그림과 같이 $\angle BAT=90°$일 때, 현 AB는 원 O의 지름이므로 $\angle BCA=90°$이다.

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

따라서 $\angle BAT=\angle BCA=90°$이다.

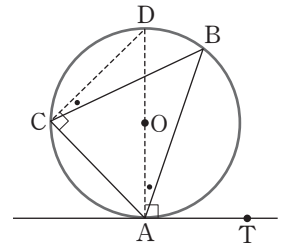
❷ $\angle$BAT가 예각인 경우

오른쪽 그림과 같이 지름 AD와 현 CD를 그으면 ❶에 의하여

$$\angle DAT=\angle DCA=90°$$

이다. 또, $\angle$DAB와 $\angle$DCB는 $\overset{\frown}{DB}$에 대한 원주각이므로 $\angle DAB=\angle DCB$이다.

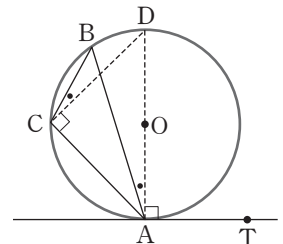
한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

따라서 $\angle BAT=\angle DAT-\angle DAB=\angle DCA-\angle DCB=\angle BCA$이다.

❸ $\angle$BAT가 둔각인 경우

오른쪽 그림과 같이 지름 AD와 현 CD를 그으면 ❶에 의하여

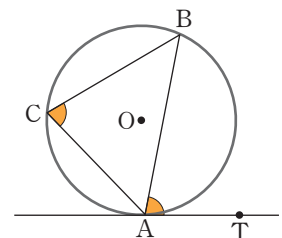
$$\angle DAT=\angle DCA=90°$$

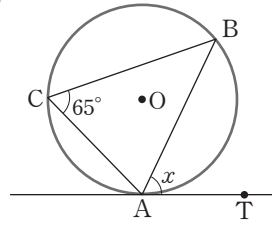
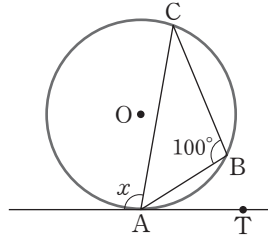
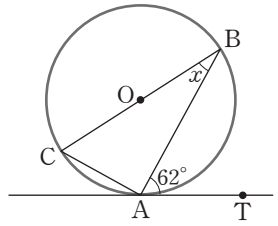
이다. 또, $\angle$BAD와 $\angle$BCD는 $\overset{\frown}{BD}$에 대한 원주각이므로 $\angle BAD=\angle BCD$이다.

따라서 $\angle BAT=\angle DAT+\angle BAD=\angle DCA+\angle BCD=\angle BCA$이다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

원의 접선과 현이 이루는 각

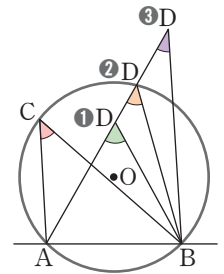
원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉,

$$\angle BAT=\angle BCA$$

문제 1 다음 그림에서 직선 AT가 원 O의 접선일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)

(2)

(3)

생각 2 네 점이 한 원 위에 있으려면 어떤 조건이 필요한가요?

원주각의 성질을 이용하여 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 알아보자.

세 점 A, B, C를 지나는 원 O에서 점 D가 직선 AB에 대하여 점 C와 같은 쪽에 있을 때, 오른쪽 그림과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

이때 $\angle$ADB의 크기를 호 AB에 대한 원주각 $\angle$ACB의 크기와 비교해 보자.

❶ 점 D가 원 O의 안에 있는 경우 $\angle ADB > \angle ACB$

❷ 점 D가 원 O 위에 있는 경우 $\angle ADB = \angle ACB$

❸ 점 D가 원 O의 밖에 있는 경우 $\angle ADB < \angle ACB$

❶, ❷, ❸에서 점 D가 원 O 위에 있는 경우는 $\angle ADB = \angle ACB$일 때뿐이다.

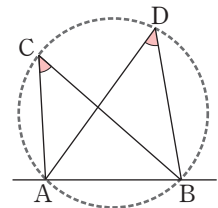
따라서 $\angle ADB = \angle ACB$이면 점 D는 원 O 위에 있고, $\angle ADB \neq \angle ACB$이면 점 D는 원 O 위에 있지 않다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

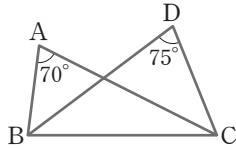
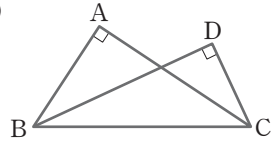
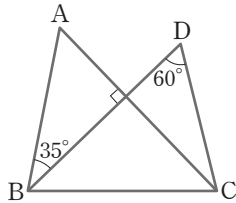
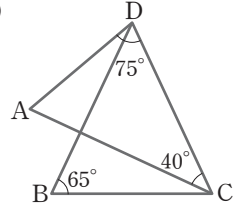
네 점이 한 원 위에 있을 조건

두 점 C, D가 직선 AB에 대하여 같은 쪽에 있을 때,

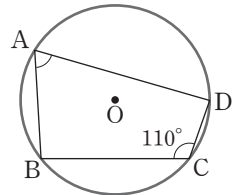
$$\angle ACB = \angle ADB$$

이면 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있다는 것은 □ABCD가 원에 내접하는 사각형이라는 것을 의미한다.

문제 2 다음 그림에서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있는 것을 모두 찾으시오.

(1)

(2)

(3)

(4)

생각 3 원에 내접하는 사각형은 어떤 성질이 있나요?

원주각과 중심각의 크기 사이의 관계를 이용하여 원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 내각의 크기를 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 사각형 ABCD에서 $\angle \mathrm{C}=110^\circ$일 때, $\angle \mathrm{A}$의 크기를 구하시오.

풀이 | 오른쪽 그림과 같이 두 점 B, D와 원의 중심 O를 연결하여 생긴 두 중심각을 각각 $\angle a$, $\angle b$라고 하자.

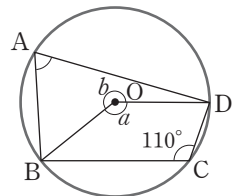
원주각과 중심각의 크기 사이의 관계에 의해

$$\angle \mathrm{A}=\frac{1}{2}\angle a,\quad \angle \mathrm{C}=\frac{1}{2}\angle b$$

이고, $\angle a+\angle b=360^\circ$이므로

$$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{C}=\frac{1}{2}(\angle a+\angle b)=\frac{1}{2}\times 360^\circ=180^\circ$$

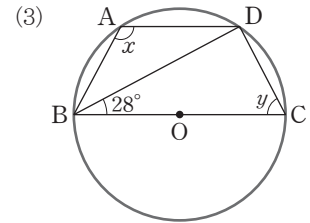
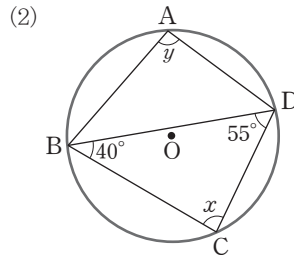
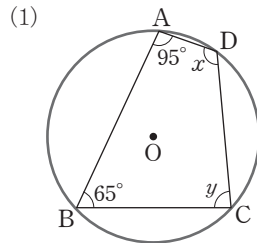
그런데 $\angle \mathrm{C}=110^\circ$이므로

$$\angle \mathrm{A}=180^\circ-110^\circ=70^\circ$$

답 70°

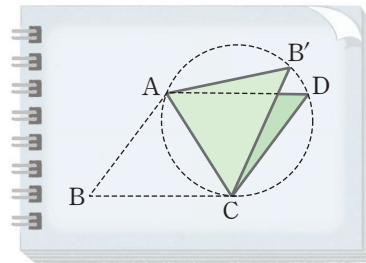
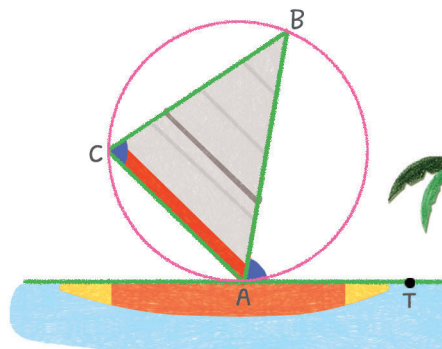
앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.

원에 내접하는 사각형의 성질

원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 내각의 크기의 합은 180°이다.

문제 3 다음 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 $\angle x$와 $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

(1)
(2)
(3)
오른쪽 그림은 평행사변형 ABCD를 대각선 AC를 따라 접은 것이다. 이 그림을 이용하여 네 점 A, B′, D, C는 한 원 위에 있음을 설명해 보자.

수학 집 짓기

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

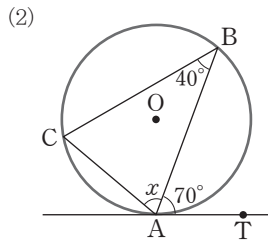
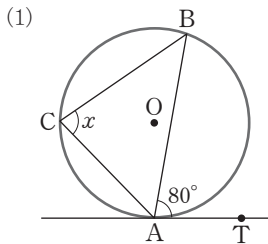
1

다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

원의 접선과 그 접점을 지나는 $\square$이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 $\square$의 크기와 같다.

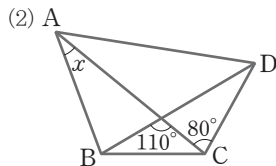
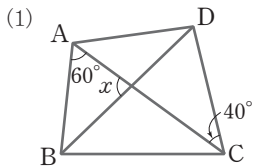
2

다음 그림에서 직선 AT는 원 O의 접선일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1) (2)

3

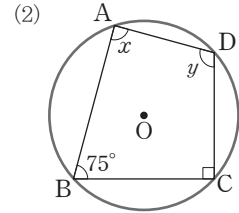
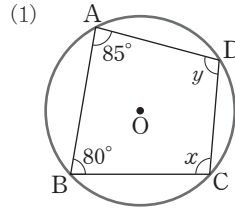
다음 그림에서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있을 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

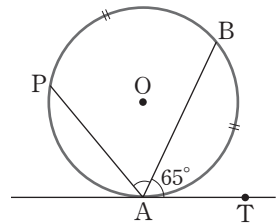
(1)

(2)

4

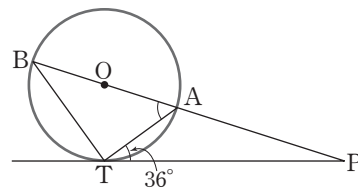
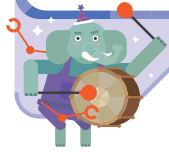
다음 그림에서 $\angle x$와 $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

(1)

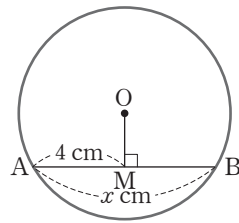
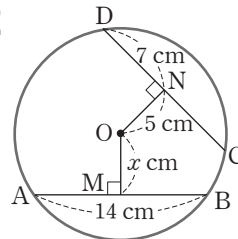
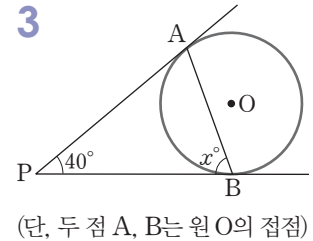
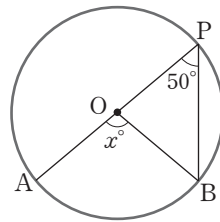
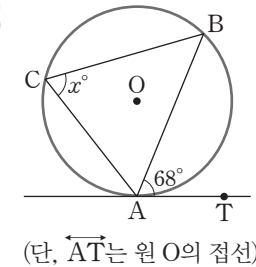
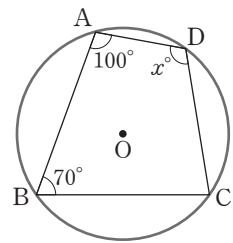
(2)

5

오른쪽 그림에서 직선 AT는 원 O의 접선이고 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BP}$이다. $\angle BAT=65°$일 때, $\angle PAB$의 크기를 구하시오.

6 과정을 다지는 문제

다음 그림에서 반직선 PT는 원 O의 접선이고, $\overline{AB}$는 원 O의 지름이다. $\angle ATP=36°$일 때, $\angle BAT$의 크기를 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

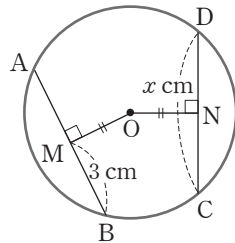
수학 놀이터

원의 성질을 이용하여 악기 이름 맞히기

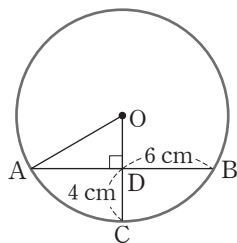
「청소년을 위한 관현악 입문」은 영국의 작곡가 브리튼(Britten, Edward Benjamin, 1913~1976)이 작곡한 곡으로, 오케스트라에 쓰이는 악기의 종류와 특징, 음색에 대한 해설을 곁들이고 있다. [출처: 두산백과사전, 2018]

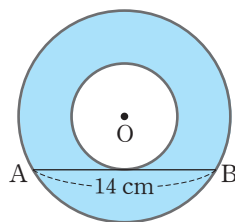
● 다음에서 x의 값을 구하고, 아래에 주어진 문제 번호와 그에 해당하는 답을 연결하여 「청소년을 위한 관현악 입문」에서 쓰이는 악기의 이름을 알아보자.

악기 그림						
번호	1	2	3	4	5	6
답	68	70	8	110	5	100
악기 이름	바이올린	바순	실로폰	하프	호른	팀파니

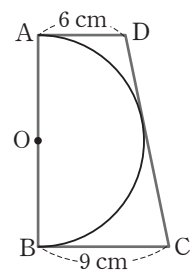
단원 마무리

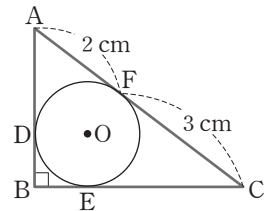
01

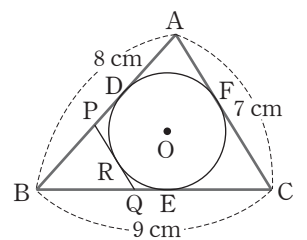
오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 하자. $\overline{OM}=\overline{ON}$일 때, x의 값을 구하시오.

02

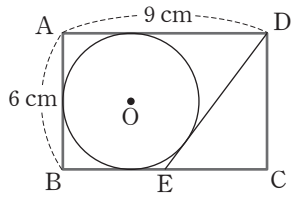
오른쪽 그림의 원 O에서 $\overline{AB}\perp\overline{OC}$이고, $\overline{BD}=6$ cm, $\overline{CD}=4$ cm일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하시오.

03

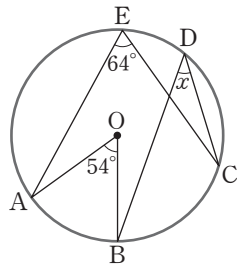
오른쪽 그림과 같이 중심이 같은 두 원에서 작은 원의 접선과 큰 원의 교점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{AB}=14$ cm일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.

04

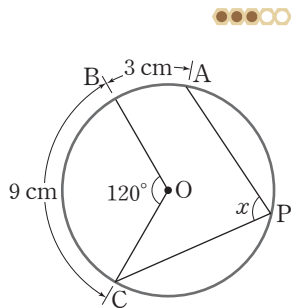
오른쪽 그림에서 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$는 반원 O의 접선일 때, $\overline{CD}$의 길이를 구하시오.

05 서술형

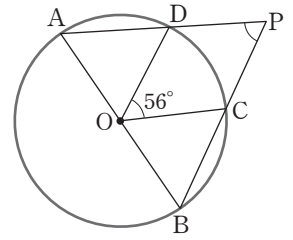
오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC가 원 O에 외접하고, 세 점 D, E, F는 각각 원 O의 접점이다. $\overline{AF}=2$ cm, $\overline{CF}=3$ cm일 때, 원 O의 둘레의 길이를 구하시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

06

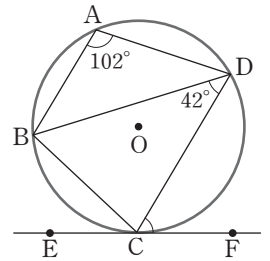
오른쪽 그림에서 △ABC가 원 O에 외접하고, 세 점 D, E, F는 각각 원 O의 접점이다. $\overline{PQ}$가 원 O의 접선이고 점 R는 원 O의 접점일 때, △PBQ의 둘레의 길이를 구하시오.

07

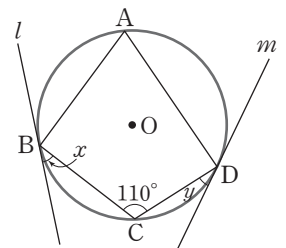
오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 9 cm, 세로의 길이가 6 cm인 직사각형의 3개의 변에 원 O가 내접하고 $\overline{DE}$는 원 O의 접선일 때, $\overline{DE}$의 길이를 구하시오.

08

오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

09

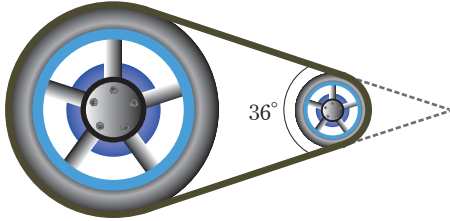
오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\widehat{AB}=3$ cm, $\widehat{BC}=9$ cm이고, $\angle BOC=120°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

10 서술형

오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$는 원 O의 지름이고, $\angle COD=56°$일 때, $\angle DPC$의 크기를 구하시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

11

오른쪽 그림과 같이 □ABCD는 원 O에 내접하고 직선 EF는 원 O의 접선이다. $\angle BAD=102°$, $\angle BDC=42°$일 때, $\angle DCF$의 크기를 구하시오.

12

오른쪽 그림과 같이 □ABCD는 원 O에 내접하고 두 직선 l, m은 각각 두 점 B, D에서 원 O에 접한다. $\angle BCD=110°$일 때, $\angle x+\angle y$의 크기를 구하시오.

문제 해결

13

다음 그림과 같이 크고 작은 두 개의 바퀴가 벨트로 연결되어 있다. 작은 바퀴 쪽의 벨트가 이루는 각의 크기가 36°일 때, 큰 바퀴에서 벨트가 닿지 않는 부분이 이루는 호의 중심각의 크기를 구하시오.

창의 UP

14

원의 중심을 찾는 방법은 여러 가지가 있다. 아래의 예시와 같이 오른쪽 용어 중 한 개 이상을 선택하여 그 방법을 설명하시오.

원주각, 직각, 호, 현, 수직이등분선, 삼각형

예시

원에 내접하는 삼각형을 그린 후 삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점을 그려서 원의 중심을 찾는다.

자기 평가

점검 항목		도달 정도		
		미흡	보통	우수
학습 내용	원의 현에 관한 성질을 이해하였는가?			
	원의 접선에 관한 성질을 이해하였는가?			
	원주각의 성질을 이해하였는가?			
	원주각을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있는가?			
학습 태도	수업 시간에 성실히 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			
	친구의 의견을 존중하고 경청하였는가?			

● 이 단원을 공부하면서 알게 된 점과 어려웠던 점은 무엇인지 써 보자.

창의+융합 프로젝트

얼마나 멀리 볼 수 있을까?

수학+과학

날씨가 맑은 날 높은 전망대에 올라가면 아주 먼 곳까지 바라볼 수 있다. 하지만 지구는 둥글기 때문에 성능이 좋은 망원경으로도 수평선이나 지평선 너머까지 볼 수는 없다. 이때 지구를 원 모양으로, 관측자의 시선을 직선으로 생각하여 원의 접선에 관한 성질을 이용하면 전망대에서 실제로 볼 수 있는 수평선까지의 거리를 계산할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 전망대의 관측 지점을 A, 관측자의 시선이 지구 표면과 만나는 접점을 B라고 하면, 두 지점 A, B 사이의 거리가 전망대에서 볼 수 있는 수평선까지의 거리이다. 이때 지구의 중심을 O라고 하면 직선 AB는 원의 접선이므로 △ABO는 직각삼각형이다.

따라서 지구의 반지름의 길이를 r, 지면으로부터 전망대의 관측 지점까지의 높이를 h라고 하면 전망대에서 볼 수 있는 수평선까지의 거리 l은 피타고라스 정리에 의해 $l^2=(r+h)^2-r^2$, 즉 $l=\sqrt{2rh+h^2}$이다.

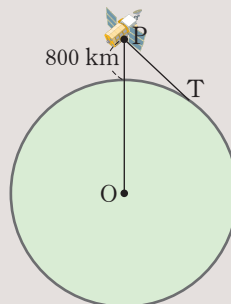
예를 들어 지구의 반지름의 길이를 6400 km, 지면으로부터 전망대의 관측 지점까지의 높이를 500 m라고 하면 전망대에서 볼 수 있는 수평선까지의 거리는

$$\sqrt{2\times 6400000\times 500+500^2}=\sqrt{6400250000}$$
$$=80001.56\cdots(\mathrm{m})$$

이다. 따라서 이 전망대에서는 직선 거리로 약 80 km까지 볼 수 있다.

[출처] • 정지숙 · 신애경 · 황신영 · 윤용석, 『초등과학 개념사전』 • 안소정, 『수학에서 꺼낸 여행』

과제

1 지구를 반지름의 길이가 6400 km인 원 O라고 할 때, 지구 표면으로부터 800 km 높이에 떠 있는 인공위성에서 지구의 사진을 찍으려고 한다. 오른쪽 그림과 같이 P 지점에 있는 인공위성에서 사진을 찍을 수 있는 지구의 가장 먼 지점을 T라고 할 때, 두 지점 P와 T 사이의 거리는 몇 km인지 구해 보자. (단, 소수점 아래 둘째 자리에서 반올림한다.)

포트폴리오 평가

• 이 단원을 학습한 후 스스로 해결하기 및 단원 마무리 문제 해결, 자기 평가 작성, 창의+융합 프로젝트 과제 해결 등 모든 활동 결과를 확인하고 점검하였는가?